ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 76 1954

О РАСЧЕТЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Г.Е. ПУХОВ, С.П. АМОСОВА

Ниже рассматривается вопрос о расчете электрических цепей с такими нелинейными элементами, присутствие которых не ведет к заметному отклонению режима работы цепи от синусоидального, и показывается, что при наличии вольт- и фазовоамперных характеристик элементов расчет может быть произведен по методу итерации.

В отличие от способов расчета, предлагаемых в [1–5], метод итерации позволяет, в случае сходимости процесса, рассчитать цепь со сколь угодно сложной конфигурацией и содержащей любое число нелинейных элементов.

1. Пусть цепь содержит n нелинейных элементов, свойства каждого из которых заданы вольт- и фазовоамперными характеристиками:

$$U_k = U_k(I_k)$$
$$\varphi_k = \varphi_k(I_k) \tag{1.1}$$

где U_K и I_K – действующие значения напряжения и тока, k-того нелинейного элемента, а $\varphi_к$ – угол сдвига фаз между синусоидами $u_к$ и i_K.

Характеристики (1.1) для данного значения тока $I_{k(s)}$ определяют комплекс сопротивления нелинейного элемента:

$$Z_{k(s)} = z_{k(s)} e^{j\varphi_{k(s)}},$$
$$z_{k(s)} = \frac{U_{k(s)}}{I_{k(s}} = z_{k(s)}(I_{k(s)}), \tag{1.2}$$
$$\varphi_{k(s)} = \varphi_{k(s)}(I_{k(s)}).$$

Режим цепи, соответствующий токам $I_{k(s)}$, может быть описан системой уравнений.

$$\dot{I}_{k(s)} = \sum_{l=1}^{m} Y_{kl(s)} \dot{Э}_l \ , \tag{1.3}$$

где m – число источников с э.д.с. $Э_i$ (i = 1,2 m).

Коэффициенты уравнений (1.3) зависят от токов $I_{k(s)}$, т.е.

$$Y_{kl(s)} = Y_{kl(s)}(Z_{1(s)}, Z_{2(s)}, \ldots Z_{n(s)}). \tag{1.4}$$

Поэтому определение токов I_k по методу итерации можно вести на основе расчётных уравнений:

$$\dot{I}_{k,s+1)} = \sum_{l=1}^{m} Y_{kl(s)} \dot{Э}_l, \quad \begin{matrix}(k = 1,2\ldots n)\\(s = 0,1,2\ldots).\end{matrix} \tag{1.5}$$

Задаваясь абсолютными значениями токов $I_{k(0)}$, по характеристикам (1.1) и выражениям (1.2) находят комплексы сопротивлений $Z_{k(0)}$ нелинейных элементов. Подставляя последние в уравнения (1.5), находят токи $I_{k(1)}$. По абсолютным величинам этих токов определяют новые значения комплексов сопротивлений $Z_{k(1)}$ и т.д.

Расчет ведется до тех пор, пока токи $I_{k(s+1)}$ и $I_{k(s)}$ не окажутся почти одинаковыми, т. е. $I_{k(s+1)} \sim I_{k(s)}$. Как показывают расчёты, процесс итерации хорошо сходится для таких нелинейных элементов, сопротивления которых с увеличением проходящего через них тока уменьшаются. Когда же сопротивления увеличиваются, целесообразно выражения (1.5) преобразовать в уравнения

$$\dot{U}_{k(s+1)} = \sum_{l=1}^{m} a_{k\,l(s)} \dot{Э}_l, \quad \begin{matrix}(k = 1,2\ldots n)\\(s = 0,1,2\ldots),\end{matrix} \tag{1.5}$$

в которых U_k – напряжения на нелинейных элементах.

В тех случаях, когда часть элементов имеет характеристики первого рода, а другая второго, расчетные уравнения следует преобразовать к виду:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_{1(s+1)} \\ \dot{U}_{2\,(s+1)} \\ \cdot \\ \dot{U}_{q(s+1)} \\ \dot{I}_{(q+1)(s+1)} \\ \cdot \\ \dot{I}_{n(s+1)} \end{vmatrix} = \zeta_{(s)} \begin{vmatrix} \dot{Э}_1 \\ \dot{Э}_2 \\ \cdot \\ \dot{Э}_m \end{vmatrix}$$

Первые q строк относятся к нелинейным элементам с увеличивающимися при возрастании токов сопротивлениями, а остальные $n–q$ строк – с уменьшающимися сопротивлениями.

Число расчетных уравнений, разумеется, можно уменьшить, если заданную цепь предварительно, преобразовать в более простую, как это указано в [5].

2. Приведем примеры расчетов некоторых цепей.

Пример 1. Цепь, представленная на фиг. 1 и включенная на переменное напряжение U= 120 *в*, состоит из активного сопротивления R = 25 *ом*, катушки индуктивности с Z_0 = 20+j 45 *ом* и нелинейного элемента $R_н$, вольтамперная характеристика которого изображена на фиг. 2. [1)]

Требуется определить ток в нелинейном элементе $I_н$. Так как сопротивление нелинейного элемента с увеличением тока растет, целесообразно находить напряжение на нем. Это напряжение, очевидно, равно:

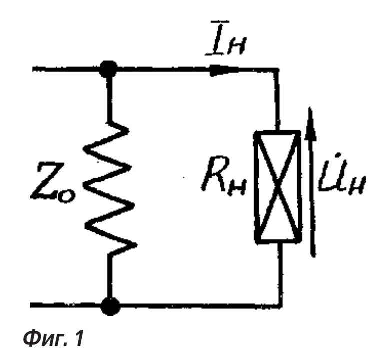
$$\dot{U}_н = \frac{UZ_0R_н}{R_нR + RZ_0 + R_нZ_0}. \qquad (2.1)$$

Следовательно, расчетное уравнение для $U_Н$ имеет вид:

$$\dot{U}_{н(s+1)} = \frac{\dot{U}Z_0R_{н(s)}}{R\,R_{н(s)} + RZ_0 + R_{н(s)}Z_0}. \qquad (2.2)$$

Подставляя численные значения величин, получаем: [2)]

$$\dot{U}_{н(s+1)} = \frac{120(20+j45)R_{н(s)}}{25R_{н(s)} + 25(20+j45) + R_{н(s)}(20+j45)}\ в. \qquad (2.3)$$



Фиг. 1

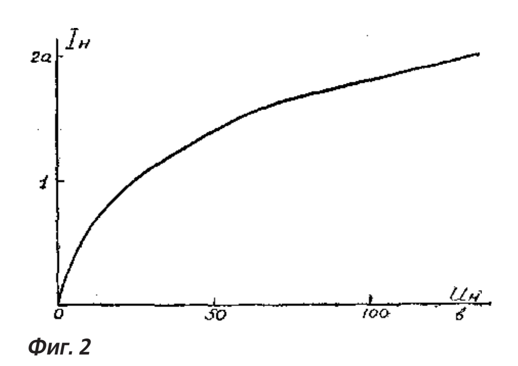
Расчет по этой формуле приведен в табл. 1.

Таблица 1.

№ приближения S	*Uн(s)*	*Iн (s)*	*zsh(s)*	*Uh(s+1)*
	в	*а*	*ом*	*в*
0	50	1,4	35,7	61,25/13°40'
1	61,25	1,53	40,1	63,7 /14°12'
2	63,7	1,55	41,15	64,3 /14°20'
3	64,3	1,555	41,3	64,3 /14°20'

Таким образом, в результате получены

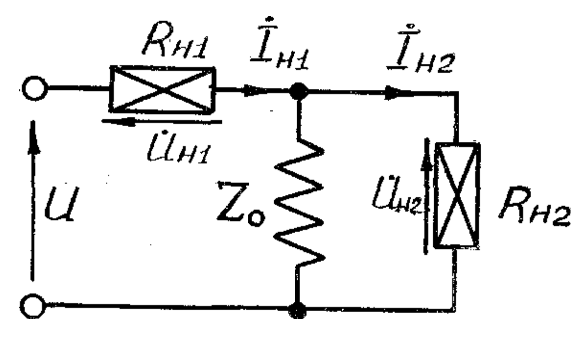
$$\dot{U}_н = 64{,}3\ /\underline{14°20'}\ в,$$
$$\dot{I}_н = 1{,}555/\underline{14°20'}\ a.$$



Фиг. 2

Пример 2. Рассмотрим расчёт цепи, содержащей два нелинейных элемента (фиг. 3) [1].

Оба нелинейных элемента имеют одинаковые вольтамперные характеристики (фиг. 2). Напряжение сети U –120 *в*, сопротивление Z_0 =20+j 45 *ом*.



Фиг. 3

Определим токи I_1 и I_2.

Полагая, $R_1 = \dfrac{U_1}{I_1}$ и $R_2 = \dfrac{U_2}{I_2}$ получим выражения для напряжений на нелинейных элементах:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}(R_2 + Z_0)\,R_1}{R_1R_2 + Z_0(R_1 + R_2)}, \tag{2.4}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}R_2Z_0}{R_1R_2 + Z_0(R_1 + R_2)}. \tag{2.5}$$

Расчетными уравнениями служат следующие выражения:

$$\dot{U}_{1(s+1)} = \frac{120[R_{2(s)} + (20 + j45)]\,R_{1(s)}}{R_{1(s)}R_{2(s)} + (20 + j45)(R_{1(s)} + R_{2(s)})}. \tag{2.6}$$

$$\dot{U}_{2(s+1)} = \frac{120\,(20 + j\,45)\,R_{2(s)}}{R_{1(s)}R_{2(s)} + (20 + j\,45)(R_{1(s)} + R_{2(s)})}. \tag{2.7}$$

Расчет по этим формулам приведен в табл. 2.

Из таблицы видим, что искомые напряжения и токи могут быть приняты равными:

$$\dot{U}_1 = 84{,}8\ \underline{/-7^\circ 20'}\ в, \qquad \dot{I}_1 = 1{,}72\ \underline{/-7^\circ 20'}\,а$$

$$\dot{U}_2 = 37{,}6\ \underline{/16^\circ 40'}\ в, \qquad \dot{I}_2 = 1{,}26\ \underline{/16^\circ 40'}\,а$$

Пример 3. Схема, показанная на фиг. 4, содержит источник переменного напряжения $Э_0$ = 140 *в*, активные сопротивления r_3=191 *ом*, r_4= 224 *ом*, r_5= 490 *ом* и два нелинейных элемента, вольт- и фазовоамперные характеристики, которых представлены на фиг. 5 и 6. Характеристики сняты при синусоидальных напряжениях.

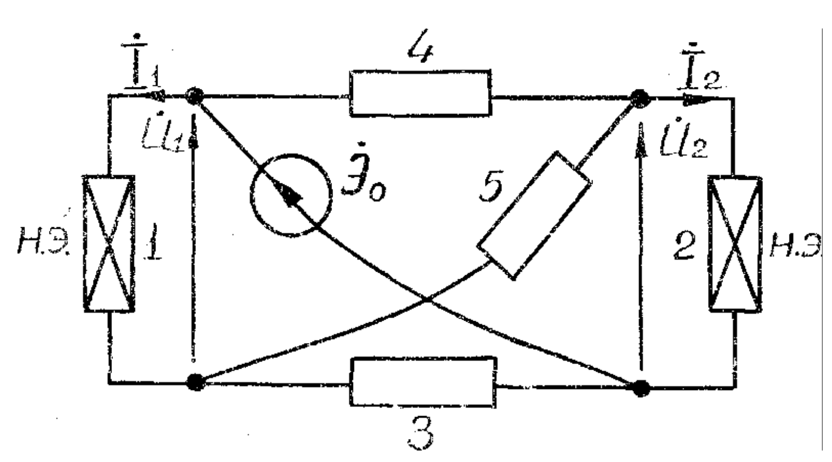
Состояние цепи может быть описано системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11}\,\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 + Y_{10}, \\ \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\,\dot{U}_2 + Y_{20}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

[1] Данные примера заимствованы из работы Р. А. Воронова [3].

Таблица 2

№ прибл. S	$U_{1(s)}$	$I_{1(s)}$	$R_{1(s)}$	$U_{2(s)}$	$I_{2(s)}$	$R_{2(s)}$	$U_{1(s+1)}$	$U_{2(s+1)}$
	в	а	ом	в	а	ом	в	в
0	75	1,64	45,7	45	1,35	33,35	81.2 /-8°40'	41 ,65 /24°50'
1	81,2	1,68	48,4	41,65	1,3	32,1	83 /-8°	39,3 /21°10'
2	83	1,7	49	39,3	1,28	30,7	84.3 /-7°30'	38 /16°40'
3	84,3	1,71	49,3	38	1,27	29,9	84.8 /- 7°20'	37,6 /16°40'
4	84,8	1,72	49,35	37,6	1,26	29, 85	84,8 /-7°20'	37,6 /16°40'



Фиг. 4

Для линейной части цепи обычным путем определяются коэффициенты:

$$Y_{11} = -0{,}00651 \ ом^{-1}, \qquad Y_{21} = -0{,}00204 \ ом^{-1},$$
$$Y_{12} = -0{,}0021 \ ом^{-1}, \qquad Y_{22} = -0{,}00729 \ ом^{-1}, \qquad (2.9)$$
$$Y_{10} = -0{,}00655 \ \dot{Э}_0 \ a, \qquad Y_{20} = 0{,}00729 \ \dot{Э}_0 \ a$$

Используя выражения:

$$U_1 = Z_1 I_1$$
$$U_2 = Z_2 I_2$$

решаем систему уравнений (2.8) относительно токов I_1 и I_2

$$\dot{I}_1 = \frac{(1 - Y_{22}Z_2)\, Y_{10} + Y_{12}Z_2Y_{20}}{(1 - Y_{11}Z_1)(1 - Y_{22}Z_2) - Y_{12}Z_2Y_{21}Z_1}, \qquad (2.11)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{(1 - Y_{11}Z_1)Y_{20} + Y_{21}Z_1Y_{10}}{(1 - Y_{11}Z_1)(1 - Y_{22}Z_2) - Y_{12}Z_2Y_{21}Z_1}. \qquad (2.12)$$

Расчетными являются уравнения (2.13, 2.14)

$$\dot{I}_{1(s+1)} = \frac{140(0{,}00655 + Z_{2(s)}.3{,}24.10^{-5})}{1 + 0{,}00729Z_{2(s)} + 0{,}00651Z_{1(s)} + 4{,}312.10^{-5}Z_{1(s)}Z_{2(s)}} \ a \qquad (2.13)$$

$$\dot{I}_{2(s+1)} = \frac{140(0{,}00729 + 3{,}404.10^{-5}Z_{1(s)})}{1 + 0{,}00729Z_{2(s)} + 0{,}00651Z_{1(s)} + 4{,}312.10^{-5}Z_{1(s)}Z_{2(s)})} \ a. \qquad (2.14)$$

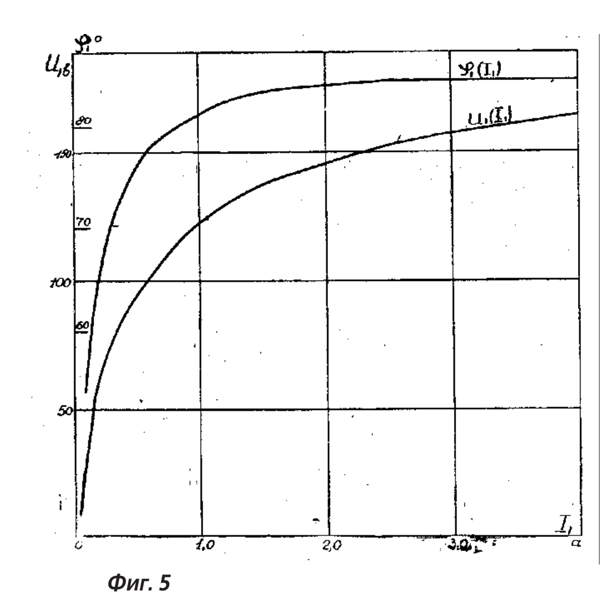
Расчет по этим формулам приведен в табл. 3.

Сходимость процесса наглядно иллюстрирует график зависимости токов I_1 и I_2 от числа приближений s, представленный на фиг. 7.

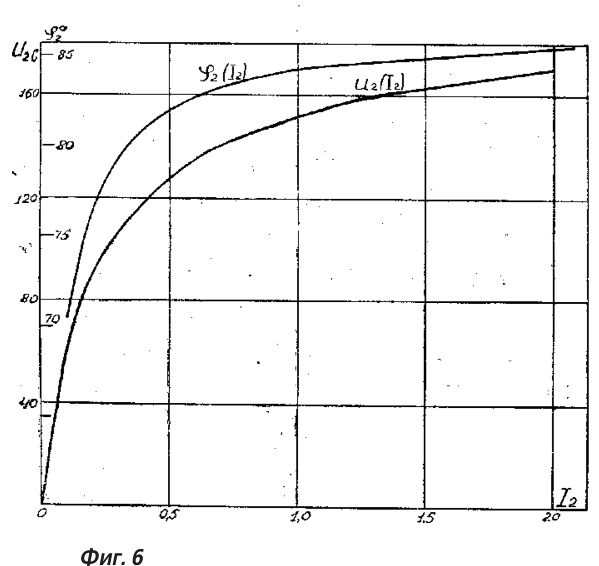
Можно принять, что токи равны: I= 0,344, <–49°a и I_2 = 0,288 <–64°

Эти результаты были проверены опытным путем. Данные опыта:

$$I_1 = 0{,}33 \ a; \ I_2 = 0{,}28 \ a.$$



Фиг. 5

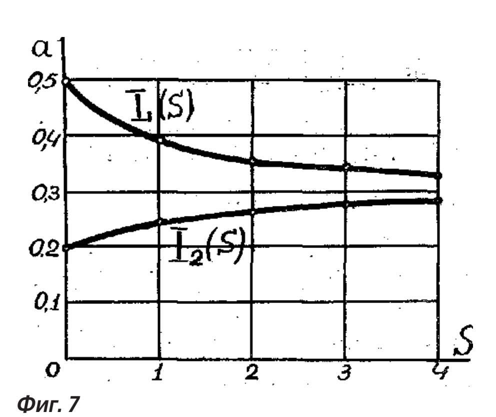


Фиг. 6

Таблица 3

№ приб.	$I_{1(s)}$	$U_{1(s)}$	$\Phi_{1(s)}$	$Z_{1(s)}$	$I_{2(s)}$
	а	в	гр	ом	а
0	0,5	94	76°l	188 /76	0,2
1	0,394	84,5	73°40'	214.5 / 73°40'	0,247
2	0,36	81,5	72°40'	226,6 / 72°407°20'	0,269
4	0, 348	80,5	72°25'	231.5 / 72°25'	0,2805

№ приб.	$U_{2(s)}$	$\Phi_{2(s)}$	$Z_{2(s)}$	$I_{1(s+1)}$	$I_{2(s+1)}$
s	в	гр	ом	а	а
0	89,5	76°20'	447,5 / 76"20'	0.394 /-45°50'	0,247 /-65°18'
1	99	78° 10'	401 / 78"10'	0,36 /-48°	0.269 /-65° 10'
2	102	78°40'	379.3 / 78°40'	0,348 /-48°40'	0.2805/-64°35'
4	103	78°50'	367.5 / 78°50'	O,3445/-49°	0.288/-64°



Фиг. 7

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов Р.А., Пономарева Г.Ф. Круговые диаграммы при исследовании нелинейных цепей. Электричество, № 12, 1951.
2. Воронов Р.А. Графоаналитический метод построения характеристик нелинейных цепей переменного и постоянного токов. Труды ТЭМИИТа, вып. XVI, 1950.
3. Воронов Р.А. Расчет цепей с нелинейными элементами методом поправок. Электричество, № 11, 1952.
4. Пухов Г.Е. К вопросу расчета электрической цепи с одним нелинейным элементом при установившемся синусоидальном режиме. Изв. ТПИ, т. 72, 1952.
5. Пухов Г.Е., Амосова С.П. Преобразования нелинейных цепей при установившемся синусоидальном режиме. Изв. ТПИ, т. 72, 1952.